数理解析研究所講究録
247巻 1975年 50-62

尤度比規準とその分布の漸近展開について

統計数理研　早川　毅

序.　単純仮説検定問題に対する尤度比規準の仮説のもとでの分布の漸近展開式を与え，特にその分布展開式の極限分布への収束を早くする補正項を与える。また固定された対立仮説のもとでの分布もとりあつかう。

$X=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ を $m \times n$ sample matrix とする。各 x_α は互に独立，同分布に従い，未知母数 $\underline{\theta}'=(\theta_1, \cdots, \theta_p)$ を持つ密度関数 $f(x|\underline{\theta})$ を持つとする。仮説Hと対立仮説Kを，

$$H: \ \underline{\theta}=\underline{\theta}_0, \quad \text{against} \quad K: \ \underline{\theta} \neq \underline{\theta}_0$$

とおく。$\underline{\theta}_0'=(\theta_{10}, \cdots, \theta_{p0})$ (specified).

尤度比規準を

$$\lambda=\prod_{\alpha=1}^{n} \frac{f(x_\alpha | \underline{\theta}_0)}{f(x_\alpha | \hat{\underline{\theta}})},$$

とし，$\hat{\underline{\theta}}$ は対立仮説Kのもとでの $\underline{\theta}$ の最尤推定量とし，$n_0 \le n$

に対してuniqueとする。 このとき $-2\log\lambda$ の分布の漸近展開を問題にする。 Wilks (1938) は仮説Hのもとで, $-2\log\lambda$ が極限分布として自由度 p の χ^2-分布となることを示している. また Lawley (1956) は, $-2\log\lambda$ の χ^2 分布への近似を改良する為に, $E[-2\log\lambda]$ を order $1/n$ まで求めて補正項 ρ を $E[-2\rho\log\lambda] = p + O(1/n^2)$ となる様に求めた.

ここでは, $-2\log\lambda$ の分布の展開を order $1/n$ の項まで求めて, Lawley による ρ との関係について述べる.

また対立仮説Kについて, 固定された状態における $-2\log\lambda$ の分布展開について考察する. なを局所対立仮説のもとでの分布については Peers (1971), Hayakawa (1975) で取扱われている.

1. 仮説のもとでの分布展開について.

記号, 仮定は追記を参照. $L(\underline{\theta}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \log f(x_\alpha | \underline{\theta})$ とおく.

$$2\log\lambda = 2\{L(\underline{\theta}_0) - L(\hat{\underline{\theta}})\}$$

となるので, $L(\underline{\theta}_0)$ を $\underline{\theta} = \hat{\underline{\theta}}$ で Taylor 展開すれば,

$$2\log\lambda = \underline{v}'\hat{Y}_{..}\underline{v} - \frac{1}{3}\hat{Y}_{...}(\circ\underline{v})^3 + \frac{1}{12}\hat{Y}_{....}(\circ\underline{v})^4 + o_p(1/n)$$

となる.

$$\hat{Y}_{..} = Y_{..} + Y_{...}\circ\underline{v} + \frac{1}{2}Y_{....}(\circ\underline{v})^2 + o_p(1/n),$$

$$\hat{Y}_{...} = Y_{...} + Y_{....}\circ\underline{v} + o_p(1/n)$$

$$\hat{Y}_{....} = Y_{....} + o_p(1/n)$$

であるから，

$$2\log\lambda = \underline{v}'Y_{..}\underline{v} + \frac{2}{3}Y_{...}(\circ\underline{v})^3 + \frac{1}{4}Y_{....}(\circ\underline{v})^4 + o_p(1/n)$$

となる．

また $\underline{v}$ と $\underline{y}$ との関係は，

$$\underline{v} = -Y_{..}^{-1}\underline{y} - \frac{1}{2}Y_{..}^{-1}[Y_{...}(\circ Y_{..}^{-1}\underline{y})^2] - \frac{1}{2}Y_{..}^{-1}[Y_{...}\circ Y_{..}^{-1}\underline{y}\circ Y_{..}^{-1}(Y_{...}(\circ Y_{..}^{-1}\underline{y})^2)]$$

$$+ \frac{1}{6}Y_{..}^{-1}[Y_{...}(\circ Y_{..}^{-1}\underline{y})^3] + o_p(1/n)$$

であるから，上式に代入することにより，

$$S = -2\log\lambda = -\underline{y}'Y_{..}^{-1}\underline{y} - \frac{1}{3}Y_{...}(\circ Y_{..}^{-1}\underline{y})^3$$

$$-\frac{1}{4}Y_{...}(\circ Y_{..}^{-1}\underline{y})^2\circ Y_{..}^{-1}(Y_{...}(\circ Y_{..}^{-1}\underline{y})^2) + \frac{1}{12}Y_{....}(\circ Y_{..}^{-1}\underline{y})^4$$

$$+ o_p(1/n)$$

となる． これは Lawley (1956) の与えた式と一致するのが確認できる．

S の分布の漸近展開式を作る為には，$\underline{y}$, $Y_{..}$, $Y_{...}$, $Y_{....}$ に関する同時分布の Multivariate Edgeworth type A 展開式を order $1/n$ まで作っておかねばならぬ．次式で与えられる．

$$f_1 = f_0 \left[1 + \frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{n} \right] + o(1/n),$$

ここで、

$$f_0 = (2\pi)^{-p/2} |K|^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} y' K^{-1} y \right\} \prod \delta(y_{ij} - \kappa_{ij}) \prod \delta(y_{ijk} - \kappa_{ijk}/\sqrt{n}) \prod \delta(y_{ijkl} - \kappa_{ijkl}/n)$$

$$A = \frac{1}{6}\{ K_{,,,}(\circ K^{-1}y)^3 - 3K_{,,,}\circ K^{-1}\circ K^{-1}y \} - K_{,,..}\circ K^{-1}y \circ D_{..}$$

$$B = \frac{1}{2}\{ K_{..,..}(\circ D_{..})^2 - (\mathrm{tr}\, K D_{..})^2 \} + \frac{1}{2}\{ K_{,,..}\circ K^{-1}\circ D_{..} - K_{,,..}(\circ K^{-1}y)^2 \circ D_{..} \}$$

$$+ \frac{1}{2}(p - y'K^{-1}y)\,\mathrm{tr}\, K D_{..} - K_{,...}\circ K^{-1}y \circ D_{...} - \frac{1}{2} K_{,..}\circ K^{-1}(K_{,..}\circ D_{..})\circ D_{..}$$

$$+ \frac{1}{2}(K_{,..}\circ K^{-1}y \circ D_{..})^2$$

$$+ \frac{1}{24}\{ K_{,,,,}(\circ K^{-1}y)^4 - 6K_{,,,,}\circ K^{-1}(\circ K^{-1}y)^2 + 3K_{,,,,}(\circ K^{-1})^2 \}$$

$$- \frac{1}{8}\{ p(p+2) - 2(p+2) y'K^{-1}y + (y'K^{-1}y)^2 \}$$

$$- \frac{1}{2} K_{,,,}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{,..}\circ D_{..}) + \frac{1}{2} K_{,,,}(\circ K^{-1}y)^2 \circ K^{-1}(K_{,..}\cdot D_{..})$$

$$+ \frac{1}{2} K_{,,,}\circ K^{-1}\circ K^{-1}y \cdot K_{,..}\circ K^{-1}y \circ D_{..} - \frac{1}{2} K_{,,,}(\circ K^{-1}y)^3 \cdot K_{,..}\circ K^{-1}y \circ D_{..}$$

$$+ \frac{1}{72}\{ -9K_{,,,}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{,,,}\circ K^{-1}) - 6K_{,,,}(* K^{-1})^3 * K_{,,,}$$

$$+ 18 K_{,,,}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{,,,}(\circ K^{-1}y)^2) + 9(K_{,,,}\circ K^{-1}\circ K^{-1}y)^2$$

$$+ 18 K_{,,,}(* K^{-1})^2 * K^{-1}y y' K^{-1} * K_{,,,} - 9K_{,,,}(\circ K^{-1}y)^2 \circ K^{-1}(K_{,,,}(\circ K^{-1}y)^2)$$

$$- 6K_{,,,}\circ K^{-1}\circ K^{-1}y \cdot K_{,,,}(\circ K^{-1}y)^3 + (K_{,,,}(\circ K^{-1}y)^3)^2 \}$$

$$D_{..}=(d_{bc}),\quad d_{bc}=\delta'(y_{bc}-\kappa_{bc})/\delta(y_{bc}-\kappa_{bc})$$

$$D_{...}=(d_{abc}),\quad d_{abc}=\delta'(y_{abc}-\kappa_{abc}/\sqrt{n})/\delta(y_{abc}-\kappa_{abc}/\sqrt{n}).$$

$\delta(y_{bc}-\kappa_{bc})$'s は Dirac の δ-関数である.

なをこの展開を $y_{abc}=\kappa_{abc}$, $y_{abcd}=\kappa_{abcd}$ で展開しても同様の式が得られるが, 与式よりもっと複雑な式となる。しかし求める結果には差はない.

S の Moment generating function $M_1(t)$ は

$$M_1(t)=\int exp(tS)\, f_1\, dy\, dY_{..}\, dY_{...}\, dY_{....} \;+ o(1/n)$$

となるから, 各項別に積分して $M_1(t)$ の漸近展開式を得る. そのとき, $K_{..}$, $K_{...}$, $K_{....}$ etc. の正則条件を用いて, 次の式が得られ使用される.

$$K_{....}(\circ K^{-1})^2+4K_{,...}(\circ K^{-1})^2+K_{.,..}(\circ K^{-1})^2+2K_{.,,..}(\circledast K^{-1})^2$$
$$+2K_{,,,..}(\circ K^{-1})^2+4K_{,,,..}(\circledast K^{-1})^2+K_{,,,,}(\circ K^{-1})^2=0$$

$$K_{...}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{...}\circ K^{-1})+K_{...}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{,,,}\circ K^{-1})+K_{...}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{,..}\circ K^{-1})$$
$$+2K_{...}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{.,.}\circ K^{-1})=0,$$

$$K_{...}(*K^{-1})^3*K_{...}+K_{...}(*K^{-1})^3*K_{,,,}+3K_{...}(*K^{-1})^3*K_{,..}=0$$

$$K_{,..}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{...}\circ K^{-1})+K_{,..}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{,,,}\circ K^{-1})+K_{,..}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{,..}\circ K^{-1})$$
$$+2K_{,..}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{.,.}\circ K^{-1})=0.$$

$$K_{,\cdot\cdot}(*K^{-1})^3 * K_{\cdot\cdot\cdot} + K_{,\cdot\cdot}(*K^{-1})^3 * K_{,,\cdot} + K_{,\cdot\cdot}(*K^{-1})^3 * K_{\cdot,\cdot}$$
$$+ K_{,\cdot\cdot}(*K^{-1})^3 * K_{,\cdot\cdot} + K_{,\cdot\cdot}(*K^{-1})^3 * K_{\cdot\cdot,} = 0 .$$

$K_{,,,}$ についても類似の式を作れる.

これらを用いて $M_1(t)$ を計算すると,

$$M_1(t) = (1-2t)^{-\frac{p}{2}} \left\{ 1 + \frac{l}{24n}\left\{ \frac{1}{1-2t} - 1 \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\},$$

$$\begin{aligned} l = {} & 3K_{\cdot\cdot\cdot\cdot}(\circ K^{-1})^2 + 12K_{\cdot\cdot,\cdot\cdot}(\circledast K^{-1})^2 + 12K_{,,,\cdot\cdot}(\circledast K^{-1})^2 + 12K_{,\cdot\cdot\cdot}(\circ K^{-1})^2 \\ & + 3K_{\cdot\cdot\cdot}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{\cdot\cdot\cdot}\circ K^{-1}) + 12K_{,\cdot\cdot}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{\cdot\cdot\cdot}\circ K^{-1}) \\ & + 12K_{,\cdot\cdot}\circ K^{-1}\circ K^{-1}(K_{\cdot,\cdot}\circ K^{-1}) + 6K_{\cdot\cdot\cdot}(*K^{-1})^3 * K_{\cdot\cdot\cdot} + 4K_{,,,}(*K^{-1})^3 * K_{\cdot\cdot\cdot} \\ & + 24K_{,\cdot\cdot}(*K^{-1})^3 * K_{\cdot\cdot\cdot} + 12K_{,\cdot\cdot}(*K^{-1})^3 * K_{,\cdot\cdot} \end{aligned}$$

となり, これを反転させると次の定理を得る.

[定理1]. 仮説 $H : \underline{\theta} = \theta_0$ のもとで, $-2\log\lambda$ の分布は

$$P\{-2\log\lambda \le x\} = P\{\chi^2_p \le x\} + \frac{l}{24n}\left[P\{\chi^2_{p+2} \le x\} - P\{\chi^2_p \le x\} \right] + o(1/n)$$

と展開され, l は上式で与えられ, χ^2_p は自由度 p の χ^2-変数である.

Wilks (1938) は展開式の第2項目の order は $1/\sqrt{n}$ の大きさと考えていた様であるが，これより $-2\log\lambda$ の χ^2 への収束はもっと速いことがわかる．

$M_1(t)$ を t に関して微分し，$t=0$ とおくと

$$E[-2\log\lambda] = p + \frac{l}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となる．これは Lawley (1956) で求めた式と一致する．これより，分布展開式の第2項と平均値展開式の第2項を同時に0とさせる補正項 ρ を作れる．

$$\rho = 1 - \frac{l}{12pn} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(例) m 次元 Normal 分布 $N(\mu, \Sigma)$ に於いて，

$H: \Sigma = \Sigma_0$ (given $\mu=\mu_0$), against $K: \Sigma \neq \Sigma_0$ (given $\mu=\mu_0$)

の尤度比規準は，N コの sample $x_1, \cdots, x_N$ により，

$$\lambda = \left(\frac{e}{N}\right)^{\frac{1}{2}Nm} |\Sigma_0^{-1}S|^{\frac{N}{2}} \operatorname{etr}\left(-\frac{1}{2}\Sigma_0^{-1}S\right), \quad S = \sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha x_\alpha'$$

となる．

K_{ijk}, K_{ijkl} etc. に関して次式が Normal 分布の共分散に対して成立する．

$$K_{i,j,k} = -K_{ij,k} = -K_{jk,i} = -K_{ki,j}, \quad K_{ijk} = 2K_{i,j,k}$$

$$K_{ijkl} = -3K_{ijk,l}, \text{ etc}, \quad K_{ij,kl} = -K_{ij,k,l}, \text{ etc}.$$

これより，第2項は

$$\{3K_{,,\cdots}(\circ K^{-1})^2 - 4K_{,,,}(*K^{-1})^3 * K_{,,,}\}/24$$

となる．そして，

$$K_{,,,}(*K^{-1})^3 * K_{,,,} = m^3 + 3m^2 + 4m$$

$$K_{,,\cdots}(\circ K^{-1})^2 = 2m^3 + 5m^2 + 5m$$

となることが check される．故に，

$$P\{-2\log\lambda \le x\} = P_f + \frac{1}{24N} m(2m^2+3m-1)\{P_{f+2} - P_f\} + o(1/N)$$

となり，$f = \frac{m(m+1)}{2}$，　$P_f = P(\chi_f^2 \le x)$．

Sugiura (1969) は $H^*: \Sigma = \Sigma_0$ against $K^*: \Sigma \ne \Sigma_0$ の modified L.R.C. について $1/N$ の項を上式の様に求めている．

2. 対立仮説のもとでの分布展開について

対立仮説のもとでは，$\underline{\theta} - \underline{\theta}_0 = \underline{\epsilon}$ (fixed) とする．$L(\underline{\theta}_0)$ を $\hat{\underline{\theta}}$ で展開すると，

$$2\log\lambda = 2n\{K(\underline{\theta}_0) - K(\underline{\theta})\} + 2\sqrt{n}\{u_0 - u + \underline{\epsilon}'\underline{y} - \underline{\epsilon}'K_{..}\underline{v} + \underline{\epsilon}'W_{..}\underline{v}\}$$
$$+ \underline{v}'K_{..}\underline{v} + K_{...}(\circ\underline{v})^2\circ\underline{\epsilon} + \underline{v}'W_{..}\underline{v} + W_{...}(\circ\underline{v})^2\circ\underline{\epsilon} + o_p(1).$$

となる．ここで，

$$K(\theta)=\int \log f(x\mid\theta)f(x\mid\theta)\,dx,\quad K(\theta_0)=\int \log f(x\mid\theta_0)\,f(x\mid\theta)\,dx$$

$$u_0=\frac{1}{\sqrt{n}}\{L(\theta_0)-nK(\theta_0)\},\qquad u=\frac{1}{\sqrt{n}}\{L(\theta)-nK(\theta)\}$$

$$W_{\cdot\cdot}=(w_{ij})=Y_{\cdot\cdot}-K_{\cdot\cdot},\qquad w_{ij}=\frac{1}{n}\{L_{ij}(\theta)-nK_{ij}(\theta)\}$$

$$W_{\cdots}=(w_{ijk})=\sqrt{n}(Y_{\cdots}-K_{\cdots}),\ w_{ijk}=\frac{1}{n}\{L_{ijk}(\theta)-nK_{ijk}(\theta)\}$$

$$L_{ij}(\theta)=\frac{\partial^2 L}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j},\quad L_{ijk}(\theta)=\frac{\partial^3 L}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j\,\partial\theta_k}$$

v を y, $Y_{\cdot\cdot}$ でおきかえると，

$$S_K=[-2\log\lambda+2n\{K(\theta_0)-K(\theta)\}]/\sqrt{n}$$

$$=2(u-u_0)-y'Y_{\cdot\cdot}^{-1}y/\sqrt{n}\quad+o_p(1/\sqrt{n})$$

となる．

S_KのMGFを求めるのに，$z'=(u_0,u,y')$, $Y_{\cdot\cdot}$ の同時密度関数のEdgeworth展開が必要となる．

$$f_2=f_0^*\Big[1+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big\{\frac{1}{6}\{H_{\cdots}(\circ M^{-1}z)^3-3H_{\cdots}\circ M^{-1}\circ M^{-1}z\}-H_{\cdots}\circ M^{-1}\circ D_{\cdot\cdot}\quad\Big\}+o(1/\sqrt{n})\Big],$$

$$f_0^*=(2\pi)^{-\frac{1}{2}(p+2)}|M|^{-\frac{1}{2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}z'M^{-1}z\Big\}\prod\delta(y_{ij}-k_{ij})$$

$$M=E(zz')=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}M_{11}&M_{12}\\M_{21}&M_{22}\end{bmatrix}&\begin{array}{c}2\\p\end{array}\\ \begin{array}{cc}\ \ 2\ \ &\ \ p\ \ \end{array}&\end{array},$$

$$H_{\cdots}=(h_{i,j,k}),\quad h_{i,j,k}=E(z_iz_jz_k),$$

$$H_{\cdot,\cdot\cdot}=(h_{i,jk}),\qquad h_{i,jk}=E(z_i\,y_{jk}).$$

これを用いて S_K のMGFを求めると,

$$M_2(t)=\exp\{2t^2\underline{e}'M_{11}\underline{e}\}\left[1+g_1/\sqrt{n}+o(1/\sqrt{n})\right]$$

$$g_1=pt+t^3\left\{4\underline{e}'M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}\underline{e}+\frac{4}{3}H_{1,1,1}(\circ\underline{e})^3\right\}$$

$\underline{e}'=(-1,1)$.

$$H_{1,1,1}(\circ\underline{e})^3=h_{0,0,1}+h_{0,1,0}+h_{1,0,0}+h_{1,1,1}-\{h_{0,0,0}+h_{0,1,1}+h_{1,0,1}+h_{1,1,0}\}.$$

故に $\tau^2=4\underline{e}'M_{11}\underline{e}$ とおくことにより, 次の定理を得る.

[定理2]. 対立仮説K: $\underline{\theta}-\underline{\theta}_0=\underline{\epsilon}$ (fixed) のもとで, 標準化された尤度比規準 $S_K=[-2\log\lambda+2n\{K(\underline{\theta}_0)-K(\underline{\theta})\}]/\sqrt{n}$ は次の様な分布の展開式を持つ.

$$P\{S_K/\tau\le x\}=\Phi(x)$$
$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{p\Phi^{(1)}(x)/\tau+\left\{4\underline{e}'M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}\underline{e}+\frac{4}{3}H_{1,1,1}(\circ\underline{e})^3\right\}\Phi^{(3)}(x)/\tau^3\right\}$$
$$+o(1/\sqrt{n})$$

となり, $\Phi^{(\nu)}(x)$ は標準正規分布関数 $\Phi(x)$ の ν 次の微分である.

特に $\underline{\theta}=\underline{\theta}_0$ とおくと, $u=u_0$ となるので, $\tau^2=0$ とな

り，分布は仮説のところで退化している.

References

[1] Hayakawa, T.(1975). The likelihood ratio criterion for a composite hypothesis under a local alternatives. To appeare.

[2] Lawley, D.N.(1956). A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. Biometrika 43, 295-303.

[3] Peers, H,W.(1971). Likelihood ratio and associated test criteria. Biometrika 58, 577-587.

[4] Sugiura, N,(1969). Asymptotic expansions of the distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix. Ann. Math. Statist., 40, 2051-2063.

[5] Wilks, S.S.(1938). The large sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses. Ann. Math. Statist. 9, 60-62.

追記. 記号及び仮定.

(i) $L(\underline{\theta})$ は $\underline{\theta}$ - 微分に関して正則とする.

(ii) $\underline{\theta} = \hat{\underline{\theta}}$ における関数の値には "^" をつける.

(iii) $v_i = \sqrt{n}(\hat{\theta}_i - \theta_i)$, $\epsilon_i = \theta_i - \theta_{i0}$, $i = 1, 2, \cdots, k$

$\underline{v} = \sqrt{n}(\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta})$, $\underline{\epsilon} = \underline{\theta} - \underline{\theta}_0$.

(iv) $y_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial L}{\partial \theta_i}$, $y_{ij} = \frac{1}{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$, $y_{ijk} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{\partial^3 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}$.

$y_{ijkl} = \frac{1}{n^2} \frac{\partial^4 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_l}$.

$\tilde{y}_i = \frac{\partial \log f}{\partial \theta_i}$, $\tilde{y}_{ij} = \frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$, $\tilde{y}_{ijk} = \frac{\partial^3 \log f}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}$, $\tilde{y}_{ijkl} = \frac{\partial^4 \log f}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_l}$.

$K_{i,j} = E(\tilde{y}_i \tilde{y}_j) = E(y_i y_j)$, $K_{ij} = E(\tilde{y}_{ij}) = E(y_{ij})$,

$K_{ijk} = E(\tilde{y}_{ijk}) = \sqrt{n} E(y_{ijk})$, $K_{i,jk} = E(\tilde{y}_i \tilde{y}_{jk}) = \sqrt{n} E(y_i y_{jk})$,

$K_{i,j,k} = E(\tilde{y}_i \tilde{y}_j \tilde{y}_k) = \sqrt{n} E(y_i y_j y_k)$,

$K_{ijkl} = E(\tilde{y}_{ijkl})$, $K_{i,jkl} = E(\tilde{y}_i \tilde{y}_{jkl})$, $K_{ij,kl} = E(\tilde{y}_{ij} \tilde{y}_{kl})$.

$K_{ij,k,l} = E(\tilde{y}_{ij} \tilde{y}_k \tilde{y}_l)$, $K_{i,j,k,l} = E(\tilde{y}_i \tilde{y}_j \tilde{y}_k \tilde{y}_l)$.

$\underline{y}' = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$, $Y_{..} = (y_{ij})$, $Y_{...} = (y_{ijk})$, $Y_{....} = (y_{ijkl})$.

$K = (K_{i,j}) = E(\underline{y}\underline{y}') = -E(Y_{..}) = -K_{..}$

(v) A : $p \times p$ 行列. $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$: $p \times 1$ vectors に対して,
次の様な和の記号を用いる.

$K_{...} \circ \underline{a} \circ \underline{b} \circ \underline{c} = \sum_{i,j,k} K_{ijk} a_i b_j c_k$ $\cdots$, スカラー.

$K_{\dots}\circ \underline{a}\circ \underline{b} = (\sum_{j,k} k_{ijk}\, a_j\, b_k)$, …… i-成分に示された成分をもつ vector.

$K_{\dots}\circ \underline{a} = (\sum_{k} k_{ijk}\, a_k)$, …… (i,j)-成分に示された成分を持つ $p\times p$ 行列.

$K_{\dots}\circ A\circ \underline{b} = \sum_{i,j,k} k_{ijk}\, a_{ij}\, b_k$, …… スカラー.

$K_{\dots} * A * B * C * K_{\dots} = \sum k_{ijk}\, k_{pqr}\, a_{ip}\, b_{jq}\, c_{kr}$

$K_{..,..} \circledast A \circledast B = \sum k_{ij,kl}\, a_{ik}\, b_{jl}$ or $\sum k_{ij,kl}\, a_{il}\, b_{jk}$.

(vi) o_p, O_p は確率的意味での大きさの order を示す.